

[고려대학교 문항정보]

1. 일반 정보

문항붙임번호	15	
유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 (오후) / 1~4번	
출제 범위	교육과정 과목명	수학 II, 미적분, 확률과 통계, 기하
	핵심개념 및 용어	함수의 극한, 미분가능성, 급수, 중복조합, 평면벡터
예상 소요 시간	80분	

2. 문항 및 제시문

문제 1. 다음 글을 읽고 물음에 답하시오. (30점)

아래로 볼록인 곡선 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq 1$)는 매개변수 t 를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x(t) = \cos^3 t, \quad y(t) = 2\sin^3 t \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

실수 a ($0 < a < 1$)에 대하여 점 $A(a, 0)$ 를 지나고 이 곡선에 접하는 직선이 단 하나 존재한다. (단, 곡선의 두 끝점은 접점이 아니다.) 이 접선을 ℓ_a 라 하자.

1-1) $a = \frac{1}{2}$ 일 때, 접선 ℓ_a 의 방정식을 구하고 그 이유를 설명하시오. (10점)

1-2) 접선 ℓ_a 가 x 축과 이루는 예각의 크기를 $g(a)$ 라 할 때, $a^3 \tan(g(a))$ 의 최댓값을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

1-3) 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 ℓ_a , 그리고 직선 $y = 0$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_1(a)$ 라 하고, 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 ℓ_a , 그리고 직선 $x = 0$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_2(a)$ 라 하자. 이때, $S_1(a) + S_2(a)$ 가 최소가 되는 a 의 값을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

문제 2. 다음 글을 읽고 물음에 답하시오. (30점)

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y = f(x)$ 는 $x = \frac{2}{3}$ 에서 변곡점을 갖는다.

(나) 다음과 같이 정의된 함수 $g(x)$ 가 $x = 0$ 에서 미분가능하다.

$$g(x) = \begin{cases} xf'(x) + f(x) & (x \geq 0) \\ (1-x)e^{-x} + \cos x & (x < 0) \end{cases}$$

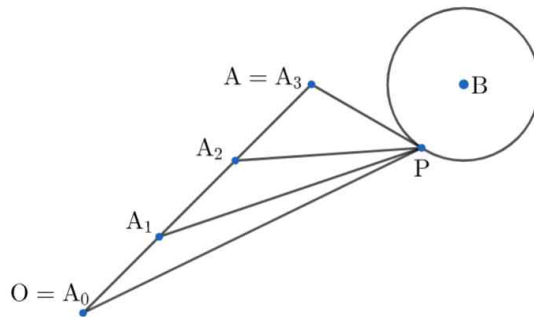
(다) 곡선 $y = f(x)$ 위의 서로 다른 세 점에서 점 $(0, k)$ 를 지나는 접선을 그을 수 있는 k 값의 범위는 $2 < k < \frac{62}{27}$ 이다.

2-1) $f(x)$ 를 구하고, 그 이유를 설명하시오. (20점)

2-2) $F(x) = \int_0^x |f(t)| dt$ 라 할 때, $\int_0^2 f(x)e^{F(x)} dx$ 의 값을 구하고 그 이유를 설명하시오. (10점)

문제 3. 다음 글을 읽고 물음에 답하시오. (20점)

아래 그림과 같이 좌표평면 위에 두 점 $O(0,0)$, $A(3,3)$ 와 중심이 $B(5,3)$ 이고 반지름의 길이가 1인 원 C 가 있다. 점 $O = A_0$, A_1 , A_2 , $A_3 = A$ 는 선분 OA 를 $\overline{A_0A_1} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3}$ 이 되도록 삼등분하며, 점 P 는 원 C 위를 움직인다.



3-1) $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}|^2$ 의 최솟값과 이때 점 P 의 좌표를 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

3-2) $|\overrightarrow{A_1P} + 4\overrightarrow{A_2P} + \overrightarrow{A_3P}|^2$ 의 최솟값은 $a + b\sqrt{10}$ 이다. (단, a 와 b 는 정수)

이때, 순서쌍 (a,b) 를 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

문제 4. 다음 글을 읽고 물음에 답하시오. (20점)

파란색 공이 n 개, 노란색 공이 $2n-1$ 개, 진홍색 공이 $2n+2$ 개 있을 때, $2n$ 개의 공을 택하는 경우의 수를 a_n 이라고 하자. (단, n 은 자연수이고, 같은 색의 공은 서로 구별하지 않는다.)

4-1) a_2 를 구하고, 그 이유를 설명하시오. (5점)

4-2) a_n 을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

4-3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n + 8n + 15}$ 을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (5점)