

[고려대학교 문항정보]

1. 일반 정보

문항 붙임번호	14	
유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(오전)/1~4번	
출제 범위	교육과정 과목명	수학, 수학II, 미적분, 확률과 통계, 기하
	핵심개념 및 용어	극한, 미분, 적분, 공간도형, 경우의 수
예상 소요 시간	80 분	

2. 문항 및 제시문

문제 1. 다음을 읽고 물음에 답하시오. (30점)

모든 항이 양수인 두 수열 a_n 과 b_n 은 다음 조건을 만족한다.

(가) $y = x^2$ 과 $y = a_n x + 1$ 로 둘러싸인 영역의 넓이는 $\frac{n}{6}$ 이다. (단, n 은 10보다 큰 자연수이다.)

(나) $y = x^2$ 과 $y = b_n x + 1$ 의 두 교점 사이의 거리는 n 이다. (단, n 은 10보다 큰 자연수이다.)

1-1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{\sqrt[3]{n^2}}$ 을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

1-2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} \times (a_{n+1}^2 - a_n^2)$ 을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

1-3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n^2}{n}$ 을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

문제 2. 다음을 읽고 물음에 답하시오. (30점)

두 이차함수 $g(x) = -x^2 + ax + b$ 와 $h(x) = x^2 + cx + d$ 에 대하여, 함수

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}g(x) - 1 & (x \geq 0) \\ h(x) & (x < 0) \end{cases}$$

는 다음 조건을 만족한다.

(가) 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 미분가능하다.

(나) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \int_{-1}^x f(t) dt + \frac{1}{6x} \right) = 0$

참고로, 양수 x 에 대하여 $4e^{\frac{x}{4}} \geq x$ 을 이용하면, $e^x \geq \left(\frac{x}{4}\right)^4$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$ 이 된다.

- 2-1) 두 이차함수 $g(x)$ 와 $h(x)$ 를 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)
- 2-2) 곡선 $y = f(x)$ 위의 서로 다른 세 점에서의 접선이 점 $(0, k)$ 를 지나는 k 값의 범위를 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)
- 2-3) $g(x) - h(x) = 0$ 의 두 근을 α , β 라 하자 (단, $\beta > \alpha$). 함수 $F(x) = \int_x^{x+(\beta-\alpha)} |g(t) - h(t)| dt$ 가 $x = x_0$ 에서 최솟값을 가질 때, x_0 와 최솟값 $F(x_0)$ 를 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

문제 3. 다음을 읽고 물음에 답하시오. (20점)

좌표공간에서 점 $A\left(0, 0, \frac{11}{3}\right)$ 을 지나는 직선이 구 $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 11$ 과 점 $P(a, 0, b)$ 에서 접하고, 점 $B(0, 0, 11)$ 을 지나는 직선이 구 S_1 과 점 $Q(0, c, d)$ 에서 접한다. 점 P 와 점 Q 에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 각각 R 과 S 라 하자. 또한, 점 P 와 점 Q 를 지나는 직선을 ℓ 이라 하고, 점 R 과 점 S 를 지나는 직선을 m 이라 하자. (단, a 와 c 는 양수이다.)

- 3-1) 선분 RS 의 길이와 두 직선 ℓ 과 m 이 이루는 각을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)
- 3-2) 구 $S_2 : (x - \sqrt{2})^2 + (y - 6)^2 + (z - \sqrt{10})^2 = 4$ 와 만나고 중심이 직선 m 위에 있는 구의 부피의 최솟값을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

문제 4. 다음을 읽고 물음에 답하시오. (20점)

특수문자 32개, 0부터 9까지의 숫자 10개, 대문자 26개와 소문자 26개의 알파벳을 사용하여 다섯 자리 비밀번호를 만들고자 한다. 단, 비밀번호에서 문자나 숫자의 중복을 허용하며, 알파벳 대문자와 소문자는 서로 다른 글자로 취급한다.

- 4-1) 특수문자 한 개, 알파벳 대문자 한 개, 그리고 숫자와 알파벳 소문자 중에서 세 개를 사용해서 다섯 자리 비밀번호를 만들 수 있는 모든 경우의 수는 두 개의 자연수 n 과 k 에 대하여 $n \times k^3$ 꼴로 표현이 된다. 이때, $n - k$ 의 값을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (단, k 는 30보다 크고 40보다 작은 자연수이다.) (10점)
- 4-2) 숫자만을 사용해서 다섯 자리 비밀번호를 만들 때, 각 자리의 숫자의 합이 38이 되도록 만드는 모든 경우의 수를 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)