

※ 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

문제 2.

앞면이 나올 확률이 p , 뒷면이 나올 확률이 q 인 동전이 있다. (단, $0 < p < 1$ 이고 $q = 1 - p$ 이다.) 이 동전을 던져서 앞면이 나오면 H, 뒷면이 나오면 T라고 나타내자. 주어진 양의 정수 $n(n \geq 3)$ 에 대해 두 선수 A와 B가 다음 규칙을 따르는 게임을 한다.

[규칙]

- (가) A와 B는 각각 네 장의 카드 $\boxed{HH}$, $\boxed{HT}$, $\boxed{TH}$, $\boxed{TT}$ 중 1장씩 선택한다. (단, A와 B는 서로 다른 카드를 선택한다.)
- (나) 심판이 동전을 반복하여 던지다가 연속하여 나온 결과가 A 또는 B가 선택한 카드에 적힌 것과 동일하게 나오는 순간, 해당 카드를 선택한 선수의 승리를 선언하고 동전 던지기를 멈춘다.
- (다) 동전을 n 번 던졌을 때까지 승자가 없는 경우 무승부를 선언하고 동전 던지기를 멈춘다.

예를 들어 $n = 5$ 이고 A와 B가 각각 $\boxed{HT}$ 와 $\boxed{HH}$ 를 선택했을 때 동전을 던져 나온 결과에 따른 승부는 다음과 같다.

결과	승부
$\begin{array}{c} \text{○ T} \text{● H} \text{● T} \end{array}$	A 승리
$\begin{array}{c} \text{○ T} \text{○ T} \text{● H} \text{● H} \end{array}$	B 승리
$\begin{array}{c} \text{○ T} \text{○ T} \text{○ T} \text{○ T} \text{○ H} \end{array}$	무승부

A가 승리할 확률을 a_n , B가 승리할 확률을 b_n , 무승부일 확률을 c_n 이라고 하자.

2-1. $n = 3$ 이고 $p = \frac{1}{4}$ 인 경우, A와 B가 각각 $\boxed{HT}$ 와 $\boxed{TH}$ 를 선택했을 때 a_3 과 b_3 을 구하시오.

2-2. 주어진 양의 정수 $n(n \geq 3)$ 에 대하여 A와 B가 각각 $\boxed{HT}$ 와 $\boxed{TH}$ 를 선택했을 때 $a_n = b_n$ 이 성립하도록 하는 p 를 모두 구하시오.

2-3. A와 B가 각각 $\boxed{\text{HH}}$ 와 $\boxed{\text{TH}}$ 를 선택했다. 두 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 과 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 이 같도록 하는 p 를 구하고, 그때의 p 의 값에 대하여 $a_m > b_m$ 이 성립하도록 하는 $m(m \geq 3)$ 의 범위를 구하시오.

2-4. 제시문의 $[\text{규칙}]\text{-(가)}$ 를 변형하여 선택할 수 있는 카드에 $\boxed{\text{HHT}}$ 를 추가하자. (단, 나머지 규칙은 동일하다.) A는 $\boxed{\text{HHT}}$ 를 선택하고 B는 $\boxed{\text{TH}}$ 를 선택했다. 두 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 과 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 이 같도록 하는 p 를 구하고, 그때의 p 의 값에 대하여 $a_m < b_m$ 이 성립하도록 하는 $m(m \geq 3)$ 의 범위를 구하시오.

수학D

활용 모집단위	공과대학 농업생명과학대학(산림과학부, 조경·지역시스템공학부, 바이오시스템·소재학부) 약학대학 첨단융합학부
문항해설	[2-1] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이용하여 각 사건의 확률을 계산할 수 있는지 평가한다. [2-2] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이용하여 각 사건의 확률을 계산할 수 있는지 평가한다. [2-3] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이용하여 각 사건의 확률을 계산할 수 있는지 평가한다. 등비수열의 합과 수열의 극한을 이해하고 있는지 평가한다. [2-4] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이용하여 각 사건의 확률을 계산할 수 있는지 평가한다. 등비수열의 합과 수열의 극한을 이해하고 있는지 평가한다.
출제 의도	[2-1] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이용하여 각 사건의 확률을 계산할 수 있는지 평가한다. [2-2] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이용하여 각 사건의 확률을 계산할 수 있는지 평가한다. [2-3] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이용하여 각 사건의 확률을 계산할 수 있는지 평가한다. 등비수열의 합과 수열의 극한을 이해하고 있는지 평가한다. [2-4] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이용하여 각 사건의 확률을 계산할 수 있는지 평가한다. 등비수열의 합과 수열의 극한을 이해하고 있는지 평가한다.

교육과정 출제근거	[개념] 지수함수와 로그함수, 수열, 확률, 수열의 극한 [출처] 교육부 고시 제2020-236호[별책8] “수학과 교육과정” 《수학 I》 - (1) 해석 - ㉠ 지수와 로그 《수학 I》 - (1) 해석 - ㉡ 지수함수와 로그함수 《수학 I》 - (2) 대수 - ㉠ 등차수열과 등비수열 《미적분》 - (1) 해석 - ㉠ 수열의 극한 《확률과 통계》 - (1) 확률과 통계 - ㉠ 확률의 뜻과 활용 《확률과 통계》 - (1) 확률과 통계 - ㉡ 조건부 확률
자료출처	권오남 외, 《수학 I》, 교학사, 2018, 8-45, 114-135쪽 류희찬 외, 《수학 I》, 천재교과서, 2018, 8-65, 124-139쪽 배종숙 외, 《수학 I》, 금성출판사, 2018, 10-67, 120-142쪽 황선욱 외, 《수학 I》, 미래엔, 2018, 8-65, 120-141쪽 권오남 외, 《미적분》, 교학사, 2019, 10-29쪽 류희찬 외, 《미적분》, 천재교과서, 2019, 10-49쪽 홍성복 외, 《미적분》, 지학사, 2019, 10-27쪽 황선욱 외, 《미적분》, 미래엔, 2019, 10-25쪽 권오남 외, 《확률과 통계》, 교학사, 2019, 40-77쪽 류희찬 외, 《확률과 통계》, 천재교과서, 2019, 40-75쪽 배종숙 외, 《확률과 통계》, 금성출판사, 2019, 46-89쪽 황선욱 외, 《확률과 통계》, 미래엔, 2019, 40-75쪽