

2022학년도 연세대학교 수시모집 논술시험 문제 자연계열(수학)

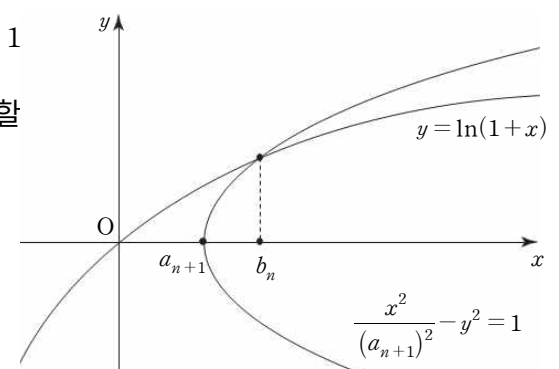
모집단위		수험번호		성명	
------	--	------	--	----	--

[문제1] 한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수를 a 라 하자. x 축, y 축 및 직선 $x+y=a$ 로 둘러싸인 직각이등변삼각형에 대하여 다음 물음에 답하시오.

[문제1-1] 직각이등변삼각형의 빗변 위의 점들 중 x 좌표와 y 좌표가 모두 음이 아닌 정수인 점들의 개수를 확률변수 X 라 할 때, $E(X)$ 의 값을 구하시오. **[4점]**

[문제1-2] 직각이등변삼각형의 둘레 또는 내부에 있는 점들 중 x 좌표와 y 좌표가 모두 음이 아닌 정수인 점들의 개수를 확률변수 Y 라 할 때, $E(Y)$ 의 값을 구하시오. **[4점]**

[문제2] <그림 1>과 같이 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 쌍곡선 $\frac{x^2}{(a_{n+1})^2} - y^2 = 1$ ($x \geq a_{n+1}$)과 함수 $y = \ln(1+x)$ 의 그래프는 한 점에서 만난다. 이 점의 x 좌표를 b_n 이라 할 때, 아래 제시문을 참고하여 다음 물음에 답하시오.



<그림 1>

[문제2-1] 수열 $\{a_n\}$ 이 $1 + \frac{1}{(a_n)^2} \leq \frac{1}{(a_{n+1})^2}$ 을 만족시킬 때, $a_{n+1} < b_n < a_n$ 이 성립함을 보이시오. **[10점]**

[문제2-2] $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \ln(1+b_n)$ 의 값을 구하시오. **[7점]**

[문제3] 자연수 N 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 홀수 m 의 값의 합을 $f(N)$ 이라 하자.

(가) 등차수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 자연수이고 공차가 1이다.

(나1) $\sum_{k=1}^m a_k = N$ 이다.

예를 들어, $N=21$ 인 경우에 아래의 두 가지만 가능하므로 $f(21) = 1+3 = 4$ 이다.

$$21 = 21 = \sum_{k=1}^1 (20+k), \quad 21 = 6+7+8 = \sum_{k=1}^3 (5+k)$$

자연수 N 과 홀수 m 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 될 수 있는 자연수의 개수를 $g_N(m)$ 이라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(가) 등차수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 자연수이고 공차가 1이다.

(나2) $\sum_{k=1}^m a_k \leq N$ 이다.

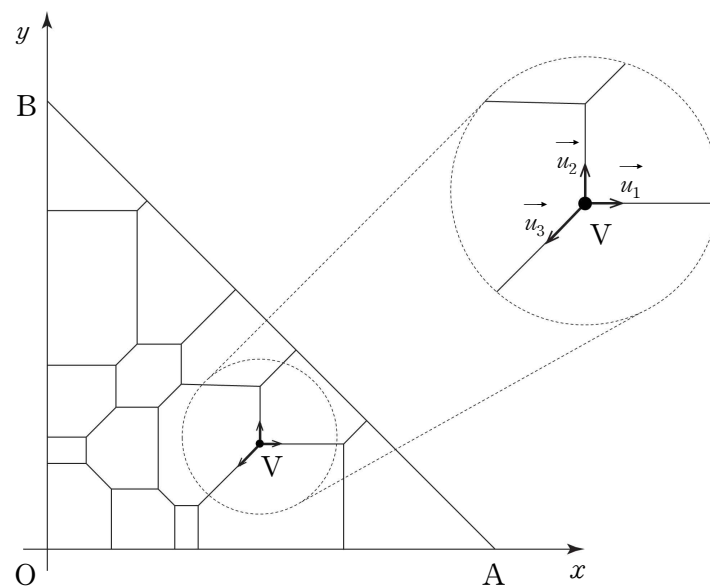
[문제3-1] N 을 m 으로 나눈 나머지가 r 일 때, $g_N(m)$ 을 N, m, r 를 이용하여 나타내시오. **[7점]**

[문제3-2] $\sum_{N=1}^{200} f(N)$ 의 값을 구하시오. **[10점]**

[문제4] 세 점 $O(0, 0)$, $A(2022, 0)$, $B(0, 2022)$ 를 꼭짓점으로 하는 직각이등변삼각형 OAB 의 내부 및 둘레에 다음 조건을 만족하도록 여러 개의 선분을 그어 그 선분을 변으로 하는 유한 개의 다각형을 만든다고 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, 양 끝점 중 적어도 한 개의 점이 삼각형 OAB 의 내부에 있는 선분은 두 다각형의 변이 되고, 두 끝점이 모두 삼각형 OAB 의 둘레에 있는 선분은 오직 한 다각형의 변이 된다.)

- (가) 다각형의 모든 변은 x 축, y 축, 직선 $y=x$, 직선 $y=-x$ 중 하나와 평행하다.
 (나) 다각형의 모든 내각의 크기는 180° 보다 작다.
 (다) 다각형의 변과 삼각형 OAB 의 변이 한 점에서 만날 때, 두 선분은 서로 수직이다.
 (라) 다각형의 꼭짓점이 삼각형 OAB 의 내부에 있을 때, 이 꼭짓점은 서로 다른 세 선분의 끝점이고 세 선분 중 두 개는 좌표축과 평행하다.

[문제4-1] <그림 2>와 같이 다각형의 꼭짓점 V 가 삼각형 OAB 의 내부에 있을 때, 점 V 에서 점 V 와 선분으로 연결된 세 점으로 향하는 벡터와 방향이 같은 세 개의 벡터 $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ 가 있다. 가능한 모든 세 개의 벡터에 대하여 $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = \vec{0}$ 임을 보이시오. (단, 세 벡터 $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ 의 성분은 -1 또는 0 또는 1 이다.) **[5점]**



<그림 2>

[문제4-2] 다각형의 꼭짓점 P 가 삼각형 OAB 의 둘레에 있고 점 P 와 선분으로 연결된 점 Q 가 삼각형 OAB 의 내부에 있을 때, 벡터 $\vec{QP}$ 와 방향이 같은 벡터 $\vec{u}$ 를 점 P 에 대한 **경계벡터**라 하자. 모든 경계벡터의 합이 $\vec{0}$ 임을 보이시오. (단, 경계벡터 $\vec{u}$ 의 성분은 -1 또는 0 또는 1 이다.) **[7점]**

[문제4-3] 선분 OA , 선분 OB , 선분 AB 와 각각 만나는 다각형의 개수가 모두 같음을 보이시오. (예를 들어, <그림 2>에서 선분 OA , 선분 OB , 선분 AB 와 각각 만나는 다각형의 개수는 모두 5이다.) **[6점]**