

2023학년도 연세대학교 수시모집 논술시험 문제 자연계열(수학)

모집단위		수험번호		성명	
------	--	------	--	----	--

[제시문 1] 연세로에 2023개의 전등이 1번부터 2023번까지 순서대로 놓여 있다. 모든 전등에는 버튼이 달려 있으며, 전등이 꺼져있을 때 버튼을 누르면 전등이 켜지고, 전등이 켜져있을 때 누르면 꺼진다. 수험번호가 k 인 학생은 연세로를 지나가며 전등 번호가 k 의 배수인 모든 전등의 버튼을 한 번씩 누른다고 하자. 다음 물음에 답하시오.

[문제 1-1] 수험번호가 1부터 2023까지의 총 2023명의 학생이 연세로를 지나갔다. 이때 2023번째 전등의 버튼은 모두 몇 번 눌러졌을까? [3점]

[문제 1-2] 모든 전등이 처음에 꺼져있는 상태에서 수험번호가 1부터 2023까지의 학생이 연세로를 지나갔다. 2023명의 학생이 모두 지나간 후 켜져있는 전등 중에서 임의의 전등을 하나를 골랐을 때, 그 전등의 버튼이 총 세 번 눌러졌을 확률을 구하시오. [5점]

[문제 1-3] 모든 전등이 처음에 꺼져있는 상태에서 수험번호가 4부터 2021까지의 학생이 연세로를 지나갔다. 2018명의 학생이 모두 지나간 후 2023개의 전등 중에서 임의로 하나를 골랐을 때, 그 전등이 켜져있을 확률을 구하시오. [9점]

[제시문 2] 구간 $[a, b]$, (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$ 의 길이를 모두 $b - a$ 로 정의한다. 집합 S 가 구간 $[0, 1]$ 의 부분집합이고 서로 겹치지 않는 구간들의 합집합으로 나타날 때, 집합 S 의 길이는 각 구간의 길이의 합으로 정의한다. 공집합의 길이는 0이라 한다.

예를 들어 $S = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 일 때, 집합 S 의 길이는 $\left(\frac{2}{9} - \frac{1}{9}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{9} + \frac{1}{2} = \frac{11}{18}$ 이다. 아래의 문제에서 주어진 함수 $f(x)$ 와 실수 t 에 대하여 집합 $S = \{x \mid f(x) > t, 0 \leq x \leq 1\}$ 의 길이를 $g(t)$ 라고 하자. 두 실수 a, b 에 대하여 $\min(a, b) = \begin{cases} a & (a < b) \\ b & (a \geq b) \end{cases}$ 으로 정의한다. 다음 물음에 답하시오.

[문제 2-1] $f(x) = 36x^3 - 27x^2 - 4x + 9$ 일 때, $g(6)$ 을 구하시오. [3점]

[문제 2-2] $f(x) = 8x^3 - 11x^2 + 3x + 5$ 일 때, $g(t) = 1$ 을 만족하는 t 의 값의 범위를 구하시오. [3점]

[문제 2-3] $f(x) = \min(ax, bx + c)$ (a, b, c 는 상수이고 $a > 0, b < 0$)일 때, $g(t)$ 를 구하고 그래프를 그리시오. [9점]

[문제 2-4] $f(x) = |a(x - b)(x - c)|$ ($-10 < a < 0, -10 < b < 0, 0 < c < 1$ 인 상수)일 때, $\int_0^{2023} g(t) dt$ 의 값을 구하시오. [9점]

[제시문 3] 좌표평면의 원점 O 를 지나고 기울기가 m 과 $-m$ 인 (단, $m \geq 1$) 직선을 각각 ℓ_1 과 ℓ_2 라 하자. 직선 ℓ_1 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 과 직선 ℓ_2 위의 점 $Q(x_2, y_2)$ 가 조건 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \overline{PQ} = 1$ 을 모두 만족하며 움직인다. 다음 물음에 답하시오.

[문제 3-1] 선분 PQ 의 중점 $M(x, y)$ 가 나타내는 도형의 방정식을 구하시오. [4점]

[문제 3-2] 점 Q 가 원점 O 에서 출발하여 일정한 속도 $(1, -m)$ 으로 직선 ℓ_2 위를 움직일 때, $\overline{OQ} = \frac{1}{2}$ 이 되는 순간에 점 P 의 속도를 구하시오. [6점]

[문제 3-3] $m = \frac{\sqrt{15}}{3}$ 이고 $\overline{OQ} = \frac{1}{2}$ 일 때, 삼각형 POQ 에 내접하는 원을 C_1 이라 하자. 이때, 원 C_1 과 x 축이 만나는 두 점 중 원점에 더 가까운 점을 지나고 y 축과 평행한 직선을 ℓ_3 이라 하자. 이때, 직선 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 이 만드는 삼각형에 내접하는 원을 C_2 라고 하자. 원 C_1 의 중심과 원 C_2 의 중심 사이의 거리를 구하시오. [9점]

